

УДК 519.854

DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-1

С. И. Веселов, А. Ю. Чирков, Д. В. Грибанов

## АГРЕГАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Исследуется следующее обобщение агрегации систем линейных диофантовых уравнений: для заданной системы уравнений

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_i, \quad i = 1, \dots, m,$  с целыми коэффициентами найти целые множители  $f_1, f_2, \dots, f_m$  такие, что вершины выпуклой оболочки множества целых неотрицательных решений этой системы являются вершинами выпуклой оболочки множества целых неотрицательных решений уравнения

$\sum_{i=1}^m f_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^m f_i a_i.$

*Материалы и методы.* В работе используются методы линейного программирования и геометрии чисел.

*Результаты.* Доказано, что обобщенное агрегирующее уравнение существует для любой системы линейных уравнений. Для систем уравнений с неотрицательными коэффициентами указан простой способ вычисления чисел  $f_1, f_2, \dots, f_m$ . Получена достижимая нижняя оценка свободного члена обобщенного агрегирующего уравнения. Описан класс задач целочисленного линейного программирования, сводящихся к задаче о рюкзаке с правой частью

$\sum_{i=1}^m f_i a_i$  меньшей, чем при любом способе обычной агрегации.

*Выводы.* Новый подход к агрегации расширяет область ее применения и уменьшает коэффициенты агрегирующего уравнения.

**Ключевые слова:** агрегация систем линейных уравнений, задача о рюкзаке.

S. I. Veselov, A. Ju. Chirkov, D. V. Gribanov

## AGGREGATION OF EQUATIONS IN INTEGER PROGRAMMING

### Abstract.

*Background.* The authors investigate the following generalization of the Diophantine equations aggregation: given  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_i, i = 1, \dots, m$  with integer coefficients, we need to find integer multipliers  $f_1, f_2, \dots, f_m$  such that all the vertices of the convex hull of integer non-negative solutions of the system are vertices of the

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 15-01-06249А).

convex hull of integer non-negative solutions of the equation  $\sum_{i=1}^m f_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^m f_i a_i$ .

*Materials and methods.* The study included well-known methods of linear programming and geometry of numbers.

*Results.* The existence of the generalized aggregating equation has been proved for any system of integer linear equations. A simple method to calculate the multipliers  $f_1, f_2, \dots, f_m$  has been developed for systems with non-negative coefficients. The obtainable lower bound has been received for the right-hand side of the generalized aggregating equation. The multidimensional knapsack problem has been reduced to the classical knapsack problem such that the right-hand side coefficient is less than at any of the existing aggregation methods.

*Conclusions.* The new approach to aggregation broadens the area of its application and reduces coefficients of the aggregating equation.

**Key words:** aggregation of linear equations, knapsack problem.

### Введение

Пусть  $Z$  обозначает множество всех целых чисел,  $N$  – множество всех неотрицательных целых чисел,  $A \in Z^{m \times n}$ ,  $\text{rank } A \geq 2$ ,  $a \in Z^m$ ,  $M(A, a) = \{x \mid Ax = a, x \in N^n\}$  и  $V(A, a)$  – множество вершин выпуклой оболочки множества  $M(A, a)$ . Вектор-строка  $f$  с целыми элементами называется *агрегирующим вектором* для  $M(A, a)$ , если  $M(A, a) = M(fA, fa)$ , а уравнение  $fAx = fa$  называется *агрегирующим уравнением* для системы  $Ax = a$ . Известно, что агрегирующее уравнение существует тогда и только, когда среди семейства эквивалентных систем линейных уравнений, задающих  $M(A, a)$ , есть система уравнений с неотрицательной матрицей коэффициентов (см., например, [1]). Если  $A \geq 0$ ,  $a \geq 0$  и координаты  $a_1, a_2, \dots, a_m$  вектора  $a$  упорядочены по возрастанию, то координаты агрегирующего вектора можно вычислить, например, по формулам [2]:

$$f_1 = \prod_{i=2}^m (a_i + 1), \quad f_2 = \prod_{i=2}^m (a_i + 1) + \prod_{i=3}^m (a_i + 1), \dots, \\ f_k = \frac{(a_k + 2)f_{k-1} - f_{k-2}}{a_k + 1} \quad \text{при } k \geq 3.$$

Разнообразие методов агрегации [2–9] объясняется тем, что свободный член агрегирующего уравнения экспоненциально зависит от  $m$ . В работе [10] получены нижние оценки, доказывающие закономерность этого явления. Достижимость этих оценок установлена в [2], где доказано, что уравнение  $\left(\prod_{j=1}^m a_j\right) \sum_{i=1}^m \frac{x_i - a_i + 1}{a_i} = 0$  является агрегирующим для системы  $x_i = a_i - 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , с попарно взаимно простыми  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и каждый из коэффициентов этого уравнения не превышает соответствующего коэффициента любого другого агрегирующего уравнения. Привлекательность агрегации с практической точки состоит в том, что она позволяет сводить об-

шую задачу целочисленного линейного программирования с ограничениями-равенствами и неотрицательными коэффициентами (т.е. многомерную задачу о рюкзаке) к одномерной (классической) задаче о рюкзаке, для которой разработано больше методов решения. Величина коэффициентов получающейся при этом задачи существенно ограничивает возможности такого приема.

Здесь описывается другая идея преобразования многомерной задачи о рюкзаке в одномерную задачу о рюкзаке.

### 1. Основной результат

Целочисленный вектор-строка  $f$  называется *g-агрегирующим вектором* для  $M(A, a)$ , если  $V(A, a) \subseteq V(fA, fa)$ . Уравнение  $fAx = fa$  называется *g-агрегирующим уравнением*. Обозначим  $n$ -мерную строку из единиц через  $e_n$ .

**Теорема 1.** *g-агрегирующее уравнение существует для любой системы линейных уравнений.*

**Доказательство.** Достаточно доказать, что при  $m \geq 2$  существует система  $Bx = b$  из  $(m-1)$  уравнений такая, что  $V(A, a) \subseteq V(B, b)$ .

В теории линейного программирования известно, что  $p \in V(A, a)$  тогда и только тогда, когда существует такой вектор-строка  $c$  с неотрицательными рациональными координатами, что для всякого  $x \in M(A, a)$  справедливо неравенство

$$cp < cx. \quad (1)$$

Покажем, что существует вектор  $c_p > 0$  такой, что неравенство  $c_p p < c_p x$  выполняется для всех  $x \in M(A, a) \cap Z^n$ . Заметим, что неравенство (1) сохранится после умножения вектора  $c$  на наименьшее общее кратное знаменателей его координат. Далее считаем, что  $c$  уже имеет целые координаты. Таким образом, для вектора  $x \in M(A, a) \cap Z^n$  справедливо неравенство  $cp + 1 \leq cx$ . Пусть  $\min\{e_n x \mid x \in M(A, a)\}$  достигается в точке  $q \in M(A, a)$ . Пусть  $\varepsilon = 1 / \lceil 2(e_n p - e_n q) \rceil$ , если  $e_n p - e_n q \neq 0$  и  $\varepsilon = 1$  в противном случае. Положим  $c_p = c + \varepsilon e_n$ . Проверим:

$$\begin{aligned} c_p p &= cp + \varepsilon e_n p = cp + \frac{e_n p}{2(e_n p - e_n q)} = cp + \frac{1}{2} + \frac{e_n q}{2(e_n p - e_n q)} = \\ &= cp + 1/2 + \varepsilon e_n q < c_p x. \end{aligned}$$

Пусть  $h_1, h_2, \dots, h_{n-m}$  – базис решетки, состоящей из целочисленных решений уравнения  $Ax = 0$ . Дополним его до базиса  $h_1, h_2, \dots, h_{n-m}, h_{n-m+1}, \dots, h_n$  целочисленной решетки  $Z^n$ . Так как  $m \geq 2$ , то  $h_{n-m+1} \neq h_n$ , следовательно, для каждого целого  $s$  векторы  $h_1, h_2, \dots, h_{n-m}, h_{n-m+1} + sh_n, \dots, h_n$  также образуют базис  $Z^n$ , поэтому векто-

ры  $h_1, h_2, \dots, h_{n-m}, h_{n-m+1} + sh_n$  являются базисом решетки целочисленных решений некоторой системы  $B_s x = 0$  ранга  $(m-1)$ . Покажем, что  $V(A, a) \subseteq V(B_s, B_s p)$  при достаточно большом  $s$ . Для произвольного вектора  $y \in M(B_s, B_s p)$  существует  $t$  такой, что  $Ay = a + q_s t$ , где  $q_s = A(h_{n-m+1} + sh_n)$ . Если  $s$  достаточно велико, то при  $t \neq 0$  вектор  $y$  имеет хотя бы одну компоненту, превышающую  $c_p p / \lambda$ , где  $\lambda$  – минимальная компонента вектора  $c_p$ . Следовательно,  $c_p p < c_p y$ , поэтому  $p \in V(B_s, B_s p)$ . Так как число точек в  $V(A, a)$  конечно, то можно выбрать  $s$  так, чтобы неравенство  $c_p p < c_p y$  выполнялось при любых  $p \in V(A, a)$ ,  $y \in M(B_s, B_s p)$ . Осталось заметить, что строки матрицы  $B_s$  принадлежат линейной оболочке строк матрицы  $A$ .  $\square$

Далее предполагается, что матрица  $A$  и вектор  $a$  имеют неотрицательные элементы. Пусть  $\delta \in \{-1, 1\}$ , тогда

$$f_\delta = \left(1, a_1 + 1, \dots, \prod_{i=1}^{m-2} (a_i + 1), \delta \prod_{i=1}^{m-1} (a_i + 1)\right).$$

Следующее утверждение доказано в [6] при  $\delta = 1$ .

**Лемма 1.**  $a \in V(f_\delta, f_\delta a)$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать, что на множестве  $M(f_\delta, f_\delta a)$  минимум функции  $h(x) = e_m x$  достигается в единственной точке  $x = a$ . Для любого  $x \in M(f_\delta, f_\delta b)$  из равенства

$$(x_1 - a_1) + (a_1 + 1)(x_2 - a_2) + \dots + (a_1 + 1) \cdots (a_{m-1} + 1)(x_m - a_m) = 0$$

последовательно выводятся формулы

$$x_1 - a_1 = (a_1 + 1)t_1, x_2 - a_2 = (a_2 + 1)t_2 - t_1, \dots,$$

$$x_{m-1} - a_{m-1} = (a_{m-1} + 1)t_{m-1}, x_m - a_m = -\delta t_{m-1},$$

где  $t_1, t_2, \dots, t_{m-1} \in \mathbb{N}$ .

Суммируя, находим

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = a_1(t_1 + 1) + a_2(t_2 + 1) + \dots + a_{m-1}(t_{m-1} + 1) + a_m + (1 - \delta)t_{m-1}.$$

Минимум правой части достигается лишь при  $t_1 = t_2 = \dots = t_{m-1} = 0$ , следовательно,  $\min h(x) = e_m a$  и достигается лишь при  $x = a$ .  $\square$

**Теорема 2.**  $V(A, a) \subseteq V(f_\delta A, f_\delta a)$ .

**Доказательство.** Утверждение тривиально, если  $M(A, a)$  – пустое множество. Предположим, что  $M(A, a)$  непусто. Рассмотрим  $x^0 \in M(A, a)$  и предположим, что  $x^0 \notin V(f_\delta A, f_\delta a)$ . Тогда найдутся число  $r$  и отличные от  $x^0$  точки  $x^1, x^2, \dots, x^r \in M(f_\delta A, f_\delta a)$  такие, что

$$x^0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, r. \quad (2)$$

Отсюда получаем

$$a = Ax^0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i Ax^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (3)$$

Так как  $Ax^i \in M(f_\delta A, f_\delta a)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , и согласно лемме  $a \in V(f_\delta A, f_\delta a)$ , равенство (2) влечет соотношения  $Ax^i = a$ ,  $i = 1, \dots, r$ , т.е.  $x^i \in M(A, a)$ ,  $i = 1, \dots, r$  поэтому из (2) вытекает  $x^0 \notin V(A, a)$ .  $\square$

## 2. Сведение многомерной задачи о рюкзаке к одномерной

Далее рассматриваем только матрицы  $A$  с неотрицательными элементами без нулевых столбцов. Поскольку  $e_m A > 0$ , то для всякого вектора-строки  $c$  существует число  $k$  такое, что  $c' = c + ke_m A \geq 0$ . Пусть  $l$  – такое целое число, что множество  $\{x \in M(A, a) \mid c'x \geq l\}$  пусто.

### Теорема 3.

1. Если  $M(f_\delta A, f_\delta a)$  – пустое множество, то  $M(A, a)$  также пустое множество.

2. Если минимум функции  $(c' + le_m A)x$  на множестве  $M(f_\delta A, f_\delta a)$  достигается в точке  $y$ , то возможны два случая:

- если  $y \in M(A, a)$ , то  $cy = \min\{cx \mid x \in M(A, a)\}$ ;
- если  $y \notin M(A, a)$ , то  $M(A, a)$  – пустое множество.

**Доказательство.** Утверждение первого пункта очевидно. Предположим, что  $(c' + le_m A)y = \min\{(c' + le_m A)x \mid x \in M(f_\delta A, f_\delta a)\}$  и  $Ay \neq a$ . Из леммы 1 следует, что  $e_m Ay \geq e_m a + 1$ , следовательно,

$$(c + ke_m A + le_m A)y \geq (c + ke_m A)y + le_m Ay \geq le_m a + l.$$

С другой стороны, если  $M(A, a)$  не пусто, то существует  $z \in M(A, a) \subseteq M(f_\delta A, f_\delta a)$  такой, что  $(c + ke_m A)z < l$ , следовательно,  $(c + ke_m A + le_m A)z < l + le_m a$ , но это неравенство противоречит тому, что  $y$  – точка минимума.  $\square$

**Теорема 4.** Если уравнение  $\alpha x = \beta$  является  $g$ -агрегирующим для  $M(A, a)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in V(A, a)$ , то  $\beta \geq \prod_{i=1}^n (y_i + 1) - 1$ . Оценка достижима, если  $A$  содержит единичную подматрицу ранга  $m$ .

**Доказательство.** Предположим, что найдутся  $u, v \in N^n$ , удовлетворяющие условиям  $u \neq v$ ,  $u \leq y$ ,  $v \leq y$ ,  $au = av$ , тогда  $y' = y - u + v \in M(\alpha, \beta)$ ,  $y'' = y + u - v \in M(\alpha, \beta)$  и  $y = (y' + y'')/2$ . Это противоречит условию теоремы, следовательно, функция  $\alpha x$  на множестве  $\{u \in N^n : u \leq y\}$  принимает  $\prod_{i=1}^n (y_i + 1) - 1$  различных ненулевых целых значений, не превышающих  $\beta$ .

Предположим для определенности, что в первых  $m$  столбцах матрицы  $A$  содержится единичная подматрица ранга  $m$ , тогда

$(a_1, a_2, \dots, a_m, 0, \dots, 0) \in V(A, a)$ , поэтому  $\beta \geq \prod_{i=1}^m (a_i + 1) - 1$ . С другой стороны, свободный член  $g$ -агрегирующего уравнения  $fAx = fa$  равен  $\prod_{i=1}^m (a_i + 1) - 1$ .  $\square$

Преимущество  $g$ -агрегации перед обычной агрегацией проиллюстрируем на задаче об упаковке множества. Рассмотрим матрицу  $S \in N^{m \times n}$  из нулей и единиц и содержащую единичную подматрицу ранга  $m$ . Вектор  $f = (1, 2, \dots, 2^{m-1})$  является  $g$ -агрегирующим для  $M(S, e_m^T)$ , а наилучшим из известных агрегирующих векторов является вектор  $2^m e_m - f$  (см., например, [4]). Свободные члены  $g$ -агрегирующего и агрегирующего уравнений равны соответственно  $2^m - 1$  и  $(m-1)2^m - 1$ . Любопытно, что столбцы матрицы  $A$  – это коэффициенты  $g$ -агрегирующего уравнения, записанные в двоичной системе счисления.

### Список литературы

1. Шевченко, В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования / В. Н. Шевченко – М. : Наука, 1995. – 192 с.
2. Веселов, С. И. Об агрегации линейных целочисленных уравнений / С. И. Веселов // Кибернетика. – 1985. – № 4. – С. 58–60.
3. Plateau, G. Aggregation of equalities in integer programming / G. Plateau and M. T. Guerch // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 1984. – Vol. 59. – P. 183–192.
4. Бабаев, Д. А. Агрегация одного класса систем целочисленных уравнений / Д. А. Бабаев, К. Ш. Мамедов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – Т. 18, № 3. – С. 614–619.
5. Kannan, R. Polynomial-Time Aggregation of Integer Programming Problems / R. Kannan // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1983. – Vol. 30, № 1. – P. 133–145.
6. Babayev, D. A. Aggregation of nonnegative integer-valued equations / D. A. Babayev, F. Glover // Discrete Applied Mathematics. – 1984. – Vol. 8, № 2. – P. 125–130.
7. Elimam, A. A. On the reduction method for integer linear programs, II\* / A. A. Elimam, S. E. Elmaghraby // Discrete Applied Mathematics. – 1985. – Vol. 12, № 3. – P. 241–260.
8. Babayev, D. A. A New Knapsack Solution Approach by Integer Equivalent Aggregation and Consistency Determination / D. A. Babayev, F. Glover, J. Ryan // Inform's Journal on Computing. – 1997. – Vol. 9, № 1. – P. 43–50.
9. Babayev, D. A. Sequential and simultaneous aggregation of Diophantine equations / D. A. Babayev, S. S. Mardanov // Discrete Applied Mathematics. – 1994. – Vol. 50, № 3. – P. 209–220.
10. Веселов, С. И. Об экспоненциальном росте коэффициентов агрегирующего уравнения / С. И. Веселов, В. Н. Шевченко // Кибернетика. – 1978. – № 4. – С. 78–79.

### References

1. Shevchenko V. N. *Kachestvennyye voprosy tselochislennogo programmirovaniya* [Qualitative problems of integer programming]. Moscow: Nauka, 1995, 192 p.
2. Veselov S. I. *Kibernetika* [Cybernetics]. 1985, no. 4, pp. 58–60.

3. Plateau G. and Guerch M. T. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 1984, vol. 59, pp. 183–192.
4. Babaev D. A., Mamedov K. Sh. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of computing mathematics and mathematical physics]. 1978, vol. 18, no. 3, pp. 614–619.
5. Kannan R. *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1983, vol. 30, no. 1, pp. 133–145.
6. Babayev D. A., Glover F. *Discrete Applied Mathematics*. 1984, vol. 8, no. 2, pp. 125–130.
7. Elimam A. A., Elmaghraby S. E. *Discrete Applied Mathematics*. 1985, vol. 12, no. 3, pp. 241–260.
8. Babayev D. A., Glover F., Ryan J. *Inform Journal on Computing*. 1997, vol. 9, no. 1, pp. 43–50.
9. Babayev D. A., Mardanov S. S. *Discrete Applied Mathematics*. 1994, vol. 50, no. 3, pp. 209–220.
10. Veselov S. I., Shevchenko V. N. *Kibernetika* [Cybernetics]. 1978, no. 4, pp. 78–79.

**Веселов Сергей Иванович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра алгебры, геометрии  
и дискретной математики, Институт  
информационных технологий,  
математики и механики, Нижегородский  
государственный университет  
имени Н. И. Лобачевского (Россия,  
г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: veselov@vmk.unn.ru

**Veselov Sergey Ivanovich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor, sub-department  
of algebra, geometry and discrete  
mathematics, Institute of information  
technology, mathematics and mechanics,  
Lobachevsky State University  
of Nizhni Novgorod (23 Gagarina avenue,  
Nizhny Novgorod, Russia)

**Чирков Александр Юрьевич**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра алгебры, геометрии  
и дискретной математики, Институт  
информационных технологий,  
математики и механики, Нижегородский  
государственный университет  
имени Н. И. Лобачевского (Россия,  
г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: chir7@yandex.ru

**Chirkov Aleksandr Yur'evich**

Candidate of physical and mathematical  
sciences, associate professor, sub-department  
of algebra, geometry and discrete  
mathematics, Institute of information  
technology, mathematics and mechanics,  
Lobachevsky State University  
of Nizhni Novgorod (23 Gagarina avenue,  
Nizhny Novgorod, Russia)

**Грибанов Дмитрий Владимирович**

ассистент, кафедра алгебры, геометрии  
и дискретной математики, Институт  
информационных технологий,  
математики и механики, Нижегородский  
государственный университет  
имени Н. И. Лобачевского (Россия,  
г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23)

E-mail: dimitry.gribanov@gmail.com

**Gribanov Dmitriy Vladimirovich**

Assistant, sub-department of algebra,  
geometry and discrete mathematics,  
Institute of information technology,  
mathematics and mechanics, Lobachevsky  
State University of Nizhni Novgorod  
(23 Gagarina avenue, Nizhny  
Novgorod, Russia)

УДК 519.854

**Веселов, С. И.**

**Агрегация уравнений в целочисленном программировании /**  
С. И. Веселов, А. Ю. Чирков, Д. В. Грибанов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 2 (38). – С. 5–12. DOI 10.21685/2072-3040-2016-2-1